

WYBRANE ZAGADNIENIA WSPÓŁCZESNEGO MODELOWANIA STRUKTURALNEGO, CZĘŚĆ II: WNIOSKOWANIE W ESTYMOWANYCH MODELACH RÓWNOWAGI OGÓLNEJ

RENATA WRÓBEL-ROTTER

Katedra Ekonometrii i Badań Operacyjnych Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie
e-mail: eewrobel@cyf-kr.edu.pl

ABSTRACT

R. Wróbel-Rotter: *Modern structural modelling, part II: inference in estimated general equilibrium models*. *Folia Oeconomica Cracoviensia* 2012, 53: 85–106.

The paper presents methods of estimation and evaluation of general equilibrium models, highlights problematic fields and challenges. After definition of preferences, technology and structural shocks model's equations, derived by solving microeconomic optimization problems, are loglinearised and the rational expectation solution is found. The next important step is the connection of theoretical variables with the observed counterparts that allows to construct the likelihood. Estimation, verification and numerical convergence plays crucial role in the overall goodness of the model. A general equilibrium model can also be used to construct hybrid vector autoregression that allows to test degree of its misspecification.

STRESZCZENIE

W pracy omówiono podstawowe zagadnienia związane z rozwiązywaniem, estymacją, weryfikacją i stabilnością numeryczną empirycznych modeli równowagi ogólnej. Zasygnalizowano możliwość ich wykorzystania do budowy hybrydowych modeli wektorowej autoregresji, które umożliwiają ocenę stopnia poprawności i potwierdzenia przez obserwacje założeń ekonomicznych przyjętych w części teoretycznej modelu. Estymowany model równowagi ogólnej jest zbiorem warunków pierwszego rzędu, zagadnień optymalizacyjnych podmiotów zdefiniowanych w części teoretycznej i warunków równowagi, zapisywanych w postaci jednej funkcji wektorowej, warunkowej względem parametrów strukturalnych, która tworzy nieliniowy, dynamiczny system racjonalnych oczekiwań, podlegający loglinearyzacji i rozwiązaniu. Stabilność rozwiązania liniowego implikuje liczne, trudne do określenia restrykcje w przestrzeni parametrów strukturalnych, które mogą stanowić przyczynę problemów numerycznych w czasie estymacji. Estymacja parametrów strukturalnych wymaga połączenia danych, pochodzących z makroekonomicznych szeregów czasowych, ze zmiennymi endogenicznymi, zdefiniowanymi w konstrukcji teoretycznej modelu,

poprzez równanie obserwacji, stanowiące podstawę konstrukcji funkcji wiarygodności. Liniowe rozwiązanie modelu zapisuje się w formie reprezentacji w przestrzeni stanów, na podstawie której możliwe jest skonstruowanie funkcji wiarygodności, wykorzystując filtr Kalmana, ze względu na nieobserwowalny charakter niektórych zmiennych stanu.

Estymacja parametrów strukturalnych jest najczęściej dokonywana poprzez techniki wnioskowania bayesowskiego, które wykorzystują kompletny system warunków pierwszego rzędu, ograniczeń zasobowych i reguł decyzyjnych. Metody bayesowskie pozwalają na skonstruowanie jednej miary określającej stopień dopasowania modelu do danych empirycznych, w postaci brzegowej gęstości obserwacji, umożliwiające formalne porównywanie modeli w obrębie danej klasy bądź też z uwzględnieniem wektorowej autoregresji. Możliwe jest również połączenie wiedzy z różnych specyfikacji. Kluczową rolę w ocenie jakości modelu pełni jego weryfikacja, na którą składa się ocena poprawności funkcjonowania algorytmów numerycznych, w szczególności procedury Metropolisa i Hastingsa, oraz analiza wrażliwości pozwalająca na uzyskanie pewnego wglądu w zależności między parametrami w konstrukcji teoretycznej. Sposób rozwiązywania i liniowej aproksymacji modeli równowagi ogólnej nie umożliwia określenia bezpośredniego powiązania parametrów postaci strukturalnej z parametrami postaci zredukowanej, które determinują wnioski ekonomiczne uzyskiwane na podstawie modelu. Powoduje to, że charakterystyka takiego związku wymaga zastosowania dodatkowych metod, w szczególności technik stosowanych w analizie wrażliwości.

Oddzielnym zagadnieniem jest stopień poprawności specyfikacji modelu, w szczególności poprawnego określenia relacji strukturalnych w gospodarce, przyjęcia odpowiednich założeń funkcyjnych dla preferencji konsumentów i technologii, nieuwzględnienia zależności nieliniowych, czy też poprawności specyfikacji procesów stochastycznych. Estymowany model równowagi ogólnej jest konstrukcją teoretyczną łączącą w jednym systemie teorię makroekonomii i mikroekonomii, co powoduje że wszelkie wielkości opisujące gospodarkę i prognozy są wynikiem założonej w modelu teorii i struktury procesów stochastycznych. Z tego względu metody badania stopnia zgodności przyjętych założeń z danymi empirycznymi stanowią szerokie pole badawcze. Jednym ze sposobów jej testowania jest budowa hybrydowych modeli wektorowej autoregresji, w których model równowagi ogólnej jest przyjmowany do generowania rozkładu a priori dla wektorowej autoregresji szacowanej dla danych obserwowanych. Stopień niezgodności przyjętych założeń ekonomicznych z danymi empirycznymi ujawnia się poprzez określone wartości parametru wagiowego. Pracę podsumowuje wskazanie obszarów, w których potencjalnie mogą wystąpić problemy w trakcie wykorzystywania estymowanych modeli równowagi ogólnej w praktyce.

KEY WORDS — SŁOWA KLUCZOWE

Estimated General Equilibrium model, rational expectation solutions, Bayesian inference, Metropolis Hastings algorithm, numerical convergence, sensitivity analysis, hybrid vector autoregression

Estymowany model równowagi ogólnej, model racjonalnych oczekiwań, wnioskowanie Bayesowskie, algorytm Metropolisa i Hastingsa, numeryczna zbieżność, analiza wrażliwości, hybrydowa wektorowa autoregresja

1. WSTĘP

Estymowane modele równowagi ogólnej są złożoną konstrukcją teoretyczną, ujmującą szereg konkurencyjnych założeń ekonomicznych, które mogą zostać poddane formalnemu testowaniu na gruncie empirycznym. Stosowanie modelu do analiz ekonomicznych wymaga jego oszacowania i pełnej weryfikacji, które mają

określić jak dobrze model odzwierciedla relacje zachodzące w realnej gospodarce. Celem niniejszej pracy jest kontynuacja omówienia zagadnień metodologicznych związanych z estymowanymi modelami równowagi ogólnej, ze szczególnym uwzględnieniem aspektów ekonometrycznych: estymacji, weryfikacji, stabilności numerycznej i analizy wrażliwości. Całość pracy podsumowuje prezentacja możliwości budowy modeli hybrydowych, będących propozycją połączenia modeli strukturalnych z giętkością wektorowej autoregresji. Rozważania w tekście mają charakter ogólny i stanowią próbę podsumowania i zebrania najważniejszych zagadnień metodologicznych. Artykuł niniejszy stanowi kontynuację opracowania: „Wybrane zagadnienia współczesnego modelowania strukturalnego, część I: estymowane modele równowagi ogólnej w zarysie”, poprzedniego w tym tomie.

2. METODY ROZWIĄZYWANIA MODELI STRUKTURALNYCH

Estymowany model równowagi ogólnej jest zbiorem warunków pierwszego rzędu, zagadnień optymalizacyjnych podmiotów zdefiniowanych w części teoretycznej, i warunków równowagi, zapisywanych w postaci jednej funkcji wektorowej, warunkowej względem parametrów strukturalnych θ , która tworzy nieliniowy, dynamiczny system racjonalnych oczekiwań:

$$E_t[f(y_{t+1}^{(+)}, y_t^{(+)}, y_{t-1}^{(-)}, \varepsilon_t; \theta)] = 0,$$

gdzie ε_t jest wektorem innowacji związanych z procesami stochastycznymi opisującymi kształtowanie się egzogenicznych zakłóceń losowych w postaci strukturalnej, o którym zakładamy: $E(\varepsilon_t) = 0$ i $E(\varepsilon_t \varepsilon_t') = \Sigma_\varepsilon$, θ zawiera wszystkie parametry fundamentalne θ_u i θ_p , parametry występujące w pozostałych równaniach, w tym θ_r , oraz parametry opisujące procesy stochastyczne zdefiniowane w części teoretycznej modelu, do których należą m.in. ξ_t^u , ξ_t^p i ξ_t^r , operator $E_t(\cdot)$ oznacza wartość oczekiwaną, warunkową względem zbioru informacji w momencie t , natomiast $y_t^{(+)}$ oznacza wektor wszystkich zmiennych endogenicznych, $y_{t+1}^{(+)}$ określa podzbiór $y_t^{(+)}$ zawierający zmienne występujące w postaci ich wartości oczekiwanych w momencie $(t+1)$, nazywanych zmiennymi antycypacyjnymi, w pierwszej polskiej pracy z zakresu estymowanych modeli równowagi ogólnej, Grabek, Kłos i Utzig-Lenarczyk (2007). Wektor $y_{t-1}^{(-)}$ grupuje zmienne endogeniczne występujące w formie opóźnień rzędu jeden; zakłada się że liczba równań strukturalnych jest równa liczbie zmiennych endogenicznych.

Rozwiązanie otrzymanego systemu racjonalnych oczekiwań polega na aproksymacji funkcji przejścia (reguły decyzyjnej), (ang. transition, policy function, decision rules):

$$y_t^{(+)} = g(y_{t-1}^{(-)}, \varepsilon_t; \theta),$$

opisującej kształtowanie się bieżących wartości zmiennych endogenicznych w zależności od wektora stanu, na który składają się opóźnione zmienne endogeniczne $y_{t-1}^{(-)}$ i bieżące zmienne egzogeniczne, oraz zakłócenia losowe ε_t , rozpatrywanej warunkowo względem wektora parametrów θ , co jest dalej pomijane w notacji. Funkcja decyzyjna $g(\cdot)$ jest wyznaczana z wykorzystaniem aproksymacji szeregiem Taylora funkcji $f(\cdot)$ wokół deterministycznego stanu stabilnego modelu, określonego przez wektor $(\bar{y}^{(-)}, \bar{\varepsilon})$, spełniający następujące warunki: $f(\bar{y}^{(+)}, \bar{y}^{(-)}, \bar{\varepsilon}) = 0$, $\bar{y}^{(+)} = g(\bar{y}^{(-)}, \bar{\varepsilon})$ i $\bar{\varepsilon} = 0$, który jest otrzymywany po rozwiązaniu nieliniowego, wielowymiarowego układu równań strukturalnych modelu. Oznacza on dynamiczną równowagę modelu, jest określony przez wartości zmiennych $y_t^{(+)} = y_{t+1}^{(+)} = \bar{y}^{(+)}$, oraz dla zakłóceń losowych, ustalonych na poziomie bezwarunkowej wartości oczekiwanej: $\varepsilon_t = \varepsilon_{t+1} = 0$. Uwzględnienie zależności $y_{t+1}^{(+)} = g^{(+)}(y_t^{(-)}, \varepsilon_{t+1})$ i $y_t^{(-)} = g^{(-)}(y_{t-1}^{(-)}, \varepsilon_t)$, gdzie $g^{(+)}(\cdot)$ i $g^{(-)}(\cdot)$ oznaczają zależności ograniczone do zmiennych odpowiednio: występujących w formie oczekiwań wartości przyszłych i w postaci opóźnień zmiennych endogenicznych, umożliwia zapisanie modelu równowagi ogólnej w formie:

$$E_t[f(g^{(+)}(g^{(-)}(y_{t-1}^{(-)}, \varepsilon_t), \varepsilon_{t+1}), g(y_{t-1}^{(-)}, \varepsilon_t), y_{t-1}^{(-)}, \varepsilon_t)] = 0,$$

która nie posiada rozwiązania analitycznego, co powoduje konieczność stosowania metod numerycznych do przybliżenia $g(y_{t-1}^{(-)}, \varepsilon_t)$. Obecnie często stosowaną jest metoda perturbacji, polegająca na rozwinięciu $f(\cdot)$ w szereg Taylora i aproksymacji pierwszego rzędu funkcji decyzyjnej przez:

$$\hat{g}(y_{t-1}^{(-)}, \varepsilon_t) = \bar{y} + g_y \hat{y}_{t-1}^{(-)} + g_\varepsilon \hat{\varepsilon}_t$$

gdzie $\hat{y}_{t-1}^{(-)} = y_{t-1}^{(-)} - \bar{y}^{(-)}$, $\hat{\varepsilon}_t = \varepsilon_t - \bar{\varepsilon}$, nieznane macierze g_y i g_ε są obliczane na podstawie warunku zerowania się odpowiednich układów równań macierzowych i spełnienia warunków stabilności, w sensie Blancharda i Kahna, rozwiązania modelu racjonalnych oczekiwań: Blanchard i Kahn (1980). Szczegóły zawierają m.in. prace: Collard i Juillard (2001a, 2001b), Juillard (2002) i Villemot (2011).

Elementy macierzy g_y i g_ε , prowadzących do rozwiązania modelu równowagi ogólnej, będące nieliniowymi funkcjami θ , są obliczane dla ustalonego wektora parametrów strukturalnych θ . W procesie estymacji równań modelu, za pomocą metod symulacyjnych, rozwiązanie takie, spełniające warunki stabilności, jest obliczane dla każdej wylosowanej wartości θ , co w praktyce oznacza nałożenie na przestrzeń parametrów strukturalnych szeregu restrykcji, których charakter jest trudny do określenia. Metody analizy wrażliwości pozwalają na uzyskanie pewnego wglądu w charakter zależności między θ a macierzami równania przejścia g_y i g_ε .

Estymacja parametrów strukturalnych θ modelu równowagi ogólnej wymaga połączenia danych, pochodzących z makroekonomicznych szeregów czasowych, ze zmiennymi endogenicznymi, zdefiniowanymi w konstrukcji teoretycznej modelu, nazywanymi zmiennymi konceptualnymi w pracy: Grabek, Kłos i Utzig-Lenarczyk (2007). Połączenie takie jest zdefiniowane przez równanie obserwacji (pomiaru), (ang. measurement equation), które łączy zmienne stanu z ich odpowiednikami w zmiennych obserwowalnych:

$$Y_t = h(y_{t-1}^{(-)}, v_t; \theta),$$

gdzie Y_t jest wektorem $(n \times 1)$ obserwowanych zmiennych endogenicznych, zakłócenie losowe w równaniu obserwacji v_t , niezależne od zakłóceń losowych ε_t w postaci strukturalnej, może być interpretowane jako błąd pomiaru danych, bądź jako miara stopnia potencjalnie niepoprawnej specyfikacji modelu teoretycznego, Lubik i Schorfheide (2006). Oprócz opóźnionych zmiennych endogenicznych $y_{t-1}^{(-)}$ i innowacji ε_t , równanie przejścia może obejmować kształtowanie się dodatkowych zmiennych z konstrukcji teoretycznej, dla których dostępne są dane empiryczne. Część zmiennych endogenicznych w modelu może nie mieć odpowiedników w zmiennych obserwowalnych, co powoduje że niektóre zależności mogą zostać pominięte w czasie konstrukcji równania obserwacji i, w konsekwencji, parametry strukturalne występujące jedynie w tych równaniach są kalibrowane. Liniowa postać funkcji $g(\cdot)$ w równaniu przejścia i funkcji $h(\cdot)$ w równaniu obserwacji powoduje, że otrzymany układ równań można traktować jako liniowy system przestrzeni stanów, bezpośrednio wykorzystywany do konstrukcji funkcji wiarygodności. Najczęściej w praktyce przyjmuje się liniową postać równania obserwacji i zakłada się rozkłady normalne dla zakłóceń losowych ε_t i v_t , co skutkuje obniżeniem stopnia numerycznego skomplikowania aplikacji. Metody rozwiązywania i estymacji modelu w przypadkach ogólnych opracowali Fernández-Villaverde i Rubio-Ramírez (2003, 2005), Arulampalam, Maskell, Gordon i Clapp (2002) oraz Amisano i Tristani (2007).

3. KONSTRUKCJA FUNKCJI WIARYGODNOŚCI

Zmienne obserwowalne są połączone ze zmiennymi zdefiniowanymi w konstrukcji teoretycznej modelu w sposób przybliżony, dopuszczający istnienie odchylenia v_t :

$$Y_t = Cy_t^{(\cdot)} + v_t$$

gdzie C pełni rolę macierzy selekcyjnej i odzwierciedla założenia dotyczące wyboru poszczególnych zmiennych stanu do konstrukcji równania obserwacji,

związane z dostępnością i definicją danych empirycznych. Wykorzystując zależność $y_t^{(\cdot)} = \bar{y} + \hat{y}_t^{(\cdot)}$, gdzie $\hat{y}_t^{(\cdot)}$ jest odchyleniem zmiennych endogenicznych $y_t^{(\cdot)}$ od ich wartości w stanie stabilnym \bar{y} , oraz zakładając liniową postać równania przejścia:

$$y_t^{(\cdot)} = \bar{y} + g_y \hat{y}_{t-1}^{(\cdot)} + g_\varepsilon \hat{\varepsilon}_t,$$

otrzymujemy następujący układ równań:

$$Y_t = C\bar{y} + C\hat{y}_t^{(\cdot)} + v_t$$

$$\hat{y}_t^{(\cdot)} = g_y \hat{y}_{t-1}^{(\cdot)} + g_\varepsilon \hat{\varepsilon}_t$$

w którym macierze g_y i g_ε zależą od wektora θ oraz zakładamy $E(v_t) = 0$ i $E(v_t v_t') = \Sigma_v$. Układ ten, liniowy względem zmiennych endogenicznych, tworzy reprezentację modelu równowagi ogólnej w przestrzeni stanów, na podstawie którego możliwe jest skonstruowanie funkcji wiarygodności, wykorzystując filtr Kalmana, ze względu na nieobserwowalny charakter niektórych zmiennych stanu. Dla wektora zakłóceń losowych w równaniu przejścia $w_t = g_\varepsilon \hat{\varepsilon}_t$ i w równaniu obserwacji v_t zakłada się niezależne, identyczne rozkłady normalne, o wartościach oczekiwanych równych zero i macierzach kowariancji odpowiednio Q oraz V : $w_t \sim iidN(0, Q)$ i $v_t \sim iidN(0, V)$.

Łączny rozkład obserwacji Y , pochodzącej z teoretycznej gospodarki pozostającej w równowadze dynamicznej, jest iloczynem warunkowych rozkładów wektorów Y_t , względem przeszłych wartości Y_{t-1} : $p(Y_t | Y_{t-1}, \theta)$, przy ustalonych parametrach θ i rozkładzie stanu początkowego Y_0 :

$$p(Y|\theta) = p(Y_T | Y_{T-1}, \theta) p(Y_{T-1} | Y_{T-2}, \theta) \dots p(Y_1 | Y_0, \theta) p(Y_0 | \theta).$$

gdzie Y jest macierzą $(T \times n)$ obserwacji na zmiennych endogenicznych. Funkcja wiarygodności jest konstruowana rekurencyjnie; Hamilton (1994), Fernández-Villaverde i Rubio-Ramírez (2005, 2007):

$$\ell(\theta|Y) = \prod_{t=1}^T (2\pi)^{-n/2} \det(\Sigma_{t|t-1})^{-1/2} \exp[-0.5(Y_t - Y_{t|t-1})' \Sigma_{t|t-1}^{-1} (Y_t - Y_{t|t-1})],$$

gdzie $\Sigma_{t|t-1}$, o wymiarach $(n \times n)$, jest warunkową, względem zbioru informacji w momencie $(t-1)$, macierzą kowariancji wektora Y_t , zawierającego obserwacje do momentu t , $Y_{t|t-1}$ wartością oczekiwaną Y_t , warunkową względem zbioru informacji w momencie $(t-1)$:

$$Y_{t|t-1} = \bar{Y} + C\hat{y}_{t|t-1}^{(\cdot)},$$

$$\Sigma_{t|t-1} = C P_{t|t-1} C' + V,$$

natomiast predykcja wektora stanu $\hat{y}_{t+1|t}^{(\cdot)}$ i jego macierzy kowariancji $P_{t+1|t}$ zachodzi według następujących formuł:

$$\hat{y}_{t+1|t}^{(\cdot)} = g_y \hat{y}_{t|t-1}^{(\cdot)} + K_t v_t,$$

$$P_{t+1|t} = g_y (P_{t|t-1} + P_{t|t-1} C' \Sigma_{t|t-1}^{-1} C P_{t|t-1}) g_y' + Q$$

gdzie $K_t = g_y P_{t|t-1} C' \Sigma_{t|t-1}^{-1}$ oznacza poprawkę Kalmana. Stan początkowy układu ustala się w praktyce na poziomie odpowiadającym deterministycznemu stanowi stabilnemu modelowi. Opisana procedura jest zaimplementowana w pakiecie Dynare, stanowiącym obecnie podstawowe narzędzie estymacji i symulacji estymowanych modeli równowagi ogólnej, dlatego została tutaj w skrócie przedstawiona, Adjemian, Bastani, Juillard, Mihoubi, Perendia, Ratto i Villemot (2011). Funkcja wiarygodności może bezpośrednio służyć do estymacji parametrów strukturalnych modelu, m.in. Lindé (2005). Najczęściej jednak wykorzystuje się metody wnioskowania bayesowskiego, pozwalające na uwzględnienie dodatkowej informacji spoza próby i uniknięcie znacznych trudności numerycznych, ze względu na zastosowanie metod Monte Carlo. Opracowane zostały również techniki konstrukcji funkcji wiarygodności i estymacji modeli, w których występują niestacjonarne zmienne losowe; Durbin i Koopman (2001), zob. implementacja: Adjemian, Bastani, Juillard, Mihoubi, Perendia, Ratto i Villemot (2011). Linearyzacja równań strukturalnych nie jest konieczna w przypadku zastosowania innych metod konstrukcji funkcji wiarygodności, wykorzystujących filtry Monte Carlo; Arulampalam, Maskell, Gordon i Clapp (2002), Fernández-Villaverde i Rubio-Ramírez (2003), An i Schorfheide (2007a), Amisano i Tristani (2007) oraz Fair i Taylor (1983).

4. ESTYMACJA BAYESOWSKA

Analiza bayesowska dostarcza narzędzia wnioskowania o parametrach strukturalnych estymowanych modeli równowagi ogólnej, oceny niepewności związanej z ich estymacją i metody określania błędu popełnianego przy szacowaniu interesujących badacza charakterystyk teoretycznej gospodarki. Możliwość konstrukcji rozkładu prawdopodobieństwa wybranej funkcji parametrów fundamentalnych modelu, procesów stochastycznych i pozostałych, wielkości odzwierciedlających mechanizmy gospodarcze, ma kluczowe znaczenie w ocenie stopnia wiarygodności rezultatów badań. Bayesowskie podejście do estymacji wykorzystuje kompletny system warunków pierwszego rzędu, ograniczeń zasobowych i reguł

decyzyjnych, który jest następnie szacowany na podstawie danych pochodzących ze zagregowanych szeregów czasowych, pozwalając równocześnie na skonstruowanie jednej miary określającej stopień dopasowania modelu do danych empirycznych, w postaci brzegowej gęstości obserwacji. Jednoczesna estymacja kompletnego systemu dynamicznego pozwala na rozwiązanie problemów endogeniczności regresorów, występującego w regule decyzyjnej banku centralnego, który wymaga stosowania szeregu dodatkowych zmiennych instrumentalnych podczas estymacji pojedynczych równań uogólnioną metodą momentów, Lubik i Schorfheide (2006). Z innych prac poświęconych bayesowskiej estymacji modeli równowagi ogólnej można wymienić: Schorfheide (2011), Fernández-Villaverde (2010), Milani i Poirier (2007), Ruge-Murcia (2007), Rabanal i Rubio-Ramírez (2005a, 2005b), Fernández-Villaverde i Rubio-Ramírez (2004), DeJong, Ingram i Whiteman (2000), Otrók (2001) oraz Singleton (1988).

Analiza bayesowska pozwala na połączenie w procesie wnioskowania o wektorze parametrów strukturalnych danego modelu M_i subiektywnej wstępnej wiedzy badacza o możliwych wartościach parametrów, sformułowanej w rozkładzie *a priori*, z informacją zawartą w funkcji wiarygodności. Łączny rozkład wektora obserwacji $Y=(Y_1', \dots, Y_T)'$ i wektora parametrów strukturalnych θ_i danego modelu, określany przez iloczyn gęstości: próbkowej $p(Y|\theta_i, M_i)$ i *a priori* $p(\theta_i|M_i)$, jest nazywany statystycznym modelem bayesowskim, z którego na podstawie wzoru Bayesa, otrzymujemy rozkład *a posteriori* wektora parametrów, warunkowy względem i -tej specyfikacji $p(\theta_i|Y, M_i)$:

$$p(\theta_i|Y, M_i) = \frac{p(Y|\theta_i, M_i)p(\theta_i|M_i)}{p(Y|M_i)}$$

gdzie $p(Y|M_i)$ oznacza brzegową gęstość obserwacji w i -tym modelu, wyrażoną całką: $p(Y|M_i) = \int p(Y|\theta_i, M_i)p(\theta_i|M_i)d\theta_i$; Zellner (1971), Osiewalski (1991, 2001) i O'Hagan (1994). Po zaobserwowaniu danych Y , gęstość wektora obserwacji $p(Y|\theta_i, M_i)$ rozpatrujemy jako funkcję parametrów θ_i , przy ustalonych obserwacjach, czyli rozważamy funkcję wiarygodności postaci: $\ell(\theta_i|Y, M_i) = p(Y|\theta_i, M_i)$. Gęstość rozkładu *a posteriori* jest proporcjonalna do iloczynu funkcji wiarygodności $\ell(\theta_i|Y, M_i)$ i rozkładu *a priori* $p(\theta_i|M_i)$:

$$p(\theta_i|Y, M_i) \propto \ell(\theta_i|Y, M_i)p(\theta_i|M_i).$$

Łączny rozkład *a posteriori* parametrów i innych zmiennych w modelu zawiera wszystkie dostępne o nich informacje, pozwalając na wnioskowanie o ocenach punktowych i niepewności związanej z wybranymi funkcjami parametrów, poprzez odpowiednie rozkłady brzegowe. Estymacja bayesowska modeli równowagi ogólnej prowadzi do elastycznego uwzględnienia informacji o funkcyjono-

waniu gospodarki uzyskanej z badań mikroekonomicznych. Znajomość przeciętnego czasu trwania kontraktów płacowych, preferencji konsumentów w zakresie podaży pracy, czy też prawdopodobnego przedziału zmienności innych wielkości, pozwala na ich uwzględnienie poprzez rozkład *a priori*, którego rozproszenie można interpretować jako odzwierciedlenie stopnia wiarygodności wiedzy wstępnej. Subiektywne przekonania badacza dotyczące zachowań grup podmiotów gospodarczych w modelu, wyrażone w rozkładzie *a priori*, są zawsze modyfikowane przez funkcję wiarygodności, co pozwala interpretować różnice między wnioskowaniem *a priori* i *a posteriori* również w kategoriach rozbieżności między danymi mikroekonomicznymi i danymi z szeregów makroekonomicznych. Niska wstępna wiedza o kształtowaniu się parametrów strukturalnych modelu, bądź jej całkowity brak, oznacza w praktyce przyjęcie dla nich nieinformacyjnych rozkładów *a priori* powodujących, że wnioskowanie *a posteriori* opiera się głównie na informacjach zawartych w funkcji wiarygodności. Alternatywnie do podejścia bayesowskiego, w niewielkich modelach równowagi ogólnej, zarówno liniowych jak i nieliniowych, stosowano do estymacji metodę największej wiarygodności, której własności omawiają m.in. Fernández-Villaverde i Rubio-Ramírez (2005, 2007), Galí, Gertler i López-Salido (2005), Lindé (2005), Fernández-Villaverde, Rubio-Ramírez i Santos (2006) oraz Ruge-Murcia (2007).

Metody wnioskowania bayesowskiego dostarczają formalnego narzędzia służącego porównywaniu konkurencyjnych modeli, w tym modeli równowagi ogólnej i wektorowej autoregresji, poprzez ich prawdopodobieństwa *a posteriori*. W zbiorze alternatywnych statystycznych modeli bayesowskich, $M = \{M_1, \dots, M_m\}$, dla danych obserwacji Y , możemy określić prawdopodobieństwo *a posteriori* i -tego modelu, korzystając ze wzoru Bayesa:

$$P(M_i|Y) = \frac{p(Y|M_i)P(M_i)}{\sum_{j=1}^m p(Y|M_j)P(M_j)},$$

gdzie $P(M_i)$ jest prawdopodobieństwem *a priori* danej specyfikacji, opisującym subiektywne przekonania badacza co do możliwości opisu obserwacji przez ten model. Jeśli rozkład *a priori* jest scentrowany w obszarach przestrzeni parametrów, dla których funkcja wiarygodności przyjmuje niskie wartości, to model taki będzie mniej prawdopodobny *a posteriori* niż ta sama specyfikacja z bardziej rozproszonym rozkładem *a priori*, przy założeniu jednakowych szans *a priori* każdego z nich. Zgodność informacji wstępnej z funkcją wiarygodności prowadzi do najwyższego prawdopodobieństwa *a posteriori*. Bayesowskie porównywanie modeli umożliwia również eliminację wpływu prawdopodobieństw $P(M_i)$ poprzez rozważenie ilorazu szans *a posteriori* par modeli, zdefiniowanego przez iloczyn czynnika Bayesa i ilorazu szans *a priori*:

$$\frac{P(M_s|Y)}{P(M_q|Y)} = \frac{p(Y|M_s)}{p(Y|M_q)} \times \frac{P(M_s)}{P(M_q)},$$

gdzie czynnik Bayesa B_{sq} , określony przez iloraz brzegowych gęstości wektora obserwacji $p(Y|M_s)/p(Y|M_q)$, mierzy relatywną moc wyjaśniającą modeli M_s i M_q oraz ujmuje informacje, w jakim stopniu obserwacje potwierdzają model M_s w porównaniu z modelem M_q ; $B_{sq} > 1$ oznacza wskazanie przez obserwacje, że model M_s jest bardziej adekwatny do ich opisu; Jeffreys (1961), Kass i Raftery (1995).

Metody wnioskowania bayesowskiego mogą również zostać zastosowane do bezpośredniego łączenia wiedzy z konkurencyjnych modeli o kształtowaniu się wybranej funkcji parametrów strukturalnych i procesów stochastycznych, opisujących interesującą badacza wielkość makroekonomiczną Δ , np. wskaźnik inflacji w pracy: Jacobson i Karlsson (2004). Funkcja gęstości uśrednionego rozkładu *a posteriori* Δ jest średnią ważoną gęstości *a posteriori* Δ w każdym z modeli:

$$p(\Delta|Y) = \sum_{i=1}^m p(\Delta|Y, M_i) P(M_i|Y),$$

gdzie wagi $P(M_i|Y)$ są prawdopodobieństwami *a posteriori* modeli.

Schemat estymacji bayesowskiej w praktyce można sprowadzić do czterech zasadniczych części:

1. Określenie rozkładu *a priori* dla parametrów estymowanych i kalibracja parametrów nie podlegających estymacji; umożliwia to uwzględnienie w modelu wiedzy wstępnej.
2. Wyznaczenie, poprzez numeryczną aproksymację modalnej rozkładu *a posteriori*, przybliżonych ocen parametrów strukturalnych i macierzy kowariancji, które są niezbędne do zapoczątkowania łańcucha Markowa.
3. Numeryczna realizacja estymacji bayesowskiej poprzez metody Monte Carlo oparte na łańcuchach Markowa (w szczególności za pomocą algorytmu Metropolis i Hastingsa) oraz empiryczna ocena ich zbieżności.
4. Aproksymacja brzegowych rozkładów *a posteriori* parametrów oraz innych charakterystyk modelu na podstawie uzyskanego łańcucha Markowa.

5. INNE ZAGADNIENIA METODOLOGICZNE

Ogół zagadnień metodologicznych związanych z estymowanymi modelami równowagi ogólnej jest niezwykle obszerny a ich dokładne omówienie wymagałoby szeregu opracowań; obszerny przegląd tematów można znaleźć m.in. w pracy: Wróbel-Rotter (2012f). Wybrane zagadnienia metodologiczne stanowiły cel analiz we wcześniejszych pracach autorki: wprowadzenie w tematykę: Wróbel-Rotter

(2007b, 2007c), szczegóły wyprowadzenia równań strukturalnych przykładowego modelu: Wróbel-Rotter (2011a, 2011c, 2012e), omówienie zagadnień estymacji i metod numerycznych: Wróbel-Rotter (2007a, 2008, 2012b), prezentacja technik oceny stabilności rozwiązania i zależności między parametrami postaci strukturalnej i zredukowanej: Wróbel-Rotter (2011b, 2012c) oraz metoda budowy i zastosowanie hybrydowego modelu wektorowej autoregresji: Wróbel-Rotter (2012a, 2012d). Oprócz poruszonych w artykule tematów, w literaturze obecnych jest wiele zagadnień dodatkowych, z których zasadniczy dotyczy prognozowania na podstawie estymowanych modeli równowagi ogólnej, analizy charakterystyk ekonomicznych gospodarki, w szczególności funkcji odpowiedzi impulsowych, i innych zagadnień dotyczących własności modeli, m.in. warunków identyfikowalności parametrów. Szeroko traktowane są również aspekty numeryczne estymacji bayesowskiej, pełniące kluczową rolę w procesie znajdowania oszacowań parametrów. Zagadnienia te w większości nie są szczegółowo omawiane w pracy, ze względu na ich obszerność; problemy specyfikacji i identyfikowalności zostały w skrócie przedstawione poniżej. Metody prognozowania na podstawie estymowanych modeli równowagi ogólnej można znaleźć m.in. w pracach: Del Negro i Schorfheide (2003), Smets i Wouters (2004), Adolfson, Lindé i Villani (2005), Rubaszek i Skrzypczyński (2008), Schorfheide, Sill i Krysko (2010), Edge, Kiley i Laforge (2009), Herbst i Schorfheide (2011) oraz Del Negro i Schorfheide (2012). Metody prognozowania bayesowskiego omawia m.in. Geweke i White-man (2006).

6. ANALIZA WRAŻLIWOŚCI

Analiza wrażliwości jest pojęciem ogólnym i może się odnosić do badania wpływu na interesującą charakterystykę modelu zmiany jego założeń, zastosowania innej metody estymacji, przyjęcia alternatywnych metod testowania hipotez, czy też sposobu predykcji zmiennych, Poirier (1995). W zależności od zakresu zmiany danych parametrów bądź ich funkcji wokół wielkości referencyjnych, można rozpatrywać analizę wrażliwości w sensie lokalnym, rozważając elastyczności czy też efekty krańcowe, bądź globalnym (ang. global sensitivity analysis, GSA), związanym ze znacznymi zakresami wartości zmiennych niezależnych w systemie dynamicznym, jakie pozwalają przeanalizować prezentowane metody. Na gruncie wnioskowania bayesowskiego analiza wrażliwości najczęściej dotyczy wpływu zmiany parametrów rozkładów *a priori* na ich oceny uzyskane *a posteriori*. W estymowanych modelach równowagi ogólnej często też sprawdza się uzyskane rezultaty estymacji w zależności od różnych ustawień parametrów metod numerycznych i przyjętych kryteriów oceny ich zbieżności. Oddzielnym zagadnieniem jest zastosowanie metod analizy wrażliwości w ocenie zależności występujących w konstrukcji teoretycznej modelu równowagi ogólnej.

Sposób rozwiązywania i liniowej aproksymacji modeli równowagi ogólnej nie umożliwia określenia bezpośredniego powiązania parametrów postaci zredukowanej z parametrami strukturalnymi. Powoduje to, że charakterystyka takiego związku wymaga zastosowania dodatkowych metod, w szczególności technik stosowanych w analizie wrażliwości, które pozwalają na określenie wybranych cech modelu dynamicznego i kluczowych czynników determinujących jego własności. Analiza wrażliwości określa w jakim stopniu niepewność związana z wnioskowaniem o danej charakterystyce teoretycznej gospodarki, uzyskanej z postaci zredukowanej modelu, jest przypisywana do źródeł niepewności związanych z poszczególnymi parametrami strukturalnymi. Pojęciem zbliżonym do analizy wrażliwości jest analiza niepewności, która ogranicza się do czynników wyjściowych w modelu; Saltelli, Ratto, Andres, Campolongo, Cariboni, Gatelli, Saisana i Tarantola (2008). Parametry występujące w postaci strukturalnej modelu są traktowane jako wielkości wpływające na kształtowanie się najważniejszych jego własności, dotyczących m.in. warunków stabilności, współczynników postaci zredukowanej i charakterystyk ekonomicznych gospodarki. Kluczowe procesy w systemie ekonomicznym, oznaczającym w tym przypadku estymowany model równowagi ogólnej, są utożsamiane z zależnościami między parametrami strukturalnymi a parametrami postaci zredukowanej, określonymi przez nieliniowe funkcje parametrów strukturalnych w reprezentacji modelu w przestrzeni stanów. Własności tych zależności są identyfikowane przez analizę wrażliwości odpowiednich parametrów strukturalnych w modelu.

Estymowane modele równowagi ogólnej wymagają spełnienia przez parametry strukturalne szeregu warunków zapewniających stabilność ich rozwiązania. Analityczne wyznaczenie pełnego obszaru stabilności parametrów strukturalnych jest najczęściej niemożliwe i, w praktyce, zagadnienie to jest pomijane lub ograniczane do sprawdzenia warunków stabilności dla wartości oczekiwanych rozkładów *a priori*, natomiast warunki zapewniające jego spełnienie są nakładane dopiero na etapie estymacji bądź kalibracji parametrów strukturalnych. Metody analizy globalnej wrażliwości umożliwiają ocenę, które obszary przestrzeni parametrów w rozkładzie *a priori* nie spełniają warunków stabilności rozwiązania modelu i mogą być pomocne w określeniu wartości początkowych w procedurach numerycznych; zob. Ratto (2008), Berliant i Dakhlija (1997) oraz Saltelli (2002). Pozwalają one również na wykrycie potencjalnych konfliktów między wartościami poszczególnych parametrów mających kluczowe znaczenie w dopasowaniu modelu do wybranych szeregów makroekonomicznych. Analiza wrażliwości może być również zastosowana do badania obszarów stabilności rozwiązania, oceny dopasowania do danych oraz techniki przybliżania związku między parametrami postaci zredukowanej i strukturalnej modelu z zastosowaniem filtrowania Monte Carlo i dekompozycji funkcji; zob. Saltelli, Ratto, Andres, Campolongo, Cariboni, Gatelli, Saisana i Tarantola (2008), Saltelli, Tarantola, Campolongo i Ratto (2004), Ratto (2008), Berliant i Dakhlija (1997) oraz Saltelli (2002).

Pełną analizę wrażliwości dla estymowanego modelu równowagi ogólnej przedstawili m.in. Ratto, Röger, in't Veld i Girardi (2005).

7. SPECYFIKACJA I IDENTYFIKACJA MODELI

Estymowany model równowagi ogólnej jest konstrukcją teoretyczną łączącą w jednym systemie teorię makroekonomii i mikroekonomii, co powoduje że wszelkie wielkości opisujące gospodarkę i prognozy są wynikiem założonej w modelu teorii oraz struktury procesów stochastycznych kształtującej jej dynamikę. Ogólny charakter wskazuje na kilka potencjalnych źródeł jego nieodpowiedniej konstrukcji, mogących mieć swoje przyczyny w niepoprawnym określeniu relacji strukturalnych gospodarki, preferencji konsumentów i technologii, pominięciu zależności nieliniowych, nieprawidłowej specyfikacji procesów stochastycznych oraz symetrycznym traktowaniu podmiotów w modelach dla gospodarek otwartych; Lubik i Schorfheide (2006). Poprawna specyfikacja modelu jest tutaj rozumiana jako uznanie danego modelu za właściwy proces generujący obserwacje. Zmniejszenie stopnia niepoprawnej specyfikacji estymowanych modeli równowagi ogólnej jest możliwe poprzez zwiększenie liczby zmiennych losowych modelujących zakłócenia strukturalne w modelu zapisanym w postaci systemu racjonalnych oczekiwań, m.in. Smets i Wouters (2003) oraz Lubik i Schorfheide (2006). Alternatywnie, możliwe jest wprowadzenie stochastycznych zakłóceń do równania obserwacji, bez nadawania im interpretacji ekonomicznej; Sargent (1989). Ocena poprawności modeli strukturalnych jest najczęściej dokonywana po ich zapisaniu w formie wektorowej regresji, z odpowiednimi parametrycznymi restrykcjami i analizie ich zgodności z danymi empirycznymi i modelem referencyjnym; Schorfheide (2000), An i Schorfheide (2007b). Omówienie zagadnień polityki pieniężnej w przypadku modeli z pewnym stopniem nieodpowiedniej specyfikacji można znaleźć m.in. w pracy: Del Negro i Schorfheide (2005, 2009).

Oprócz zagadnienia poprawności specyfikacji estymowanych modeli równowagi ogólnej, często pojawiającym się w czasie ich konstrukcji, problemem jest identyfikacja parametrów strukturalnych. Model ekonometryczny nie jest identyfikowalny, jeśli konkurencyjne jego parametryzacje, mające różną interpretację ekonomiczną, prowadzą do tego samego rozkładu prawdopodobieństwa obserwacji, tzn. są obserwacyjnie równoważne; Lubik i Schorfheide (2006). Określenie warunków identyfikowalności modeli równowagi ogólnej jest trudniejsze niż w przypadku wektorowej autoregresji, czy też liniowych modeli o równaniach współzależnych, ze względu na nieliniowość związku między parametrami strukturalnymi a reprezentacją modelu w przestrzeni stanów, która określa łączny rozkład prawdopodobieństwa obserwacji. Modele te są identyfikowalne przy założeniu odpowiednich rozkładów *a priori* i struktury procesów egzoge-

nicznych; Lubik i Schorfheide (2004) oraz Beyer i Farmer (2004). Metody estymacji wykorzystujące podejścia z niepełną informacją, takie jak uogólniona metoda momentów czy też metoda znajdowania ocen parametrów poprzez porównywanie funkcji odpowiedzi impulsowych, mogą powodować występowanie ukrytych problemów identyfikacyjnych, ze względu na pominięcie podczas estymacji części założeń dotyczących pozostałych równań i procesów stochastycznych modelu. Specyfikacja pełnego układu założeń, konstrukcja funkcji wiarygodności, uwzględnienie dodatkowej informacji poprzez rozkład *a priori* i jednoczesna estymacja systemu równań pozwalają na zapewnienie identyfikowalności modelu i zapewniają istnienie rozkładu *a posteriori*. Zagadnienia identyfikacji modelu i jego parametrów strukturalnych nie będą szerzej omawiane w pracy, a jedynie zasygnalizowane dla zapewnienia kompleksowego podejścia do tematyki estymowanych modeli równowagi ogólnej.

8. MODELE HYBRYDOWE I POPRAWNOŚĆ SPECYFIKACJI

Stopień niezgodności restrykcji, wynikających z mikroekonomicznych zagadnień optymalizacyjnych i reguł decyzyjnych, z danymi makroekonomicznymi może być analizowany w kontekście rozkładu *a priori* i *a posteriori* na gruncie wnioskowania bayesowskiego. Rozkład *a priori*, generowany z modelu równowagi ogólnej, może być przyjmowany dla wektorowej autoregresji, umożliwiając w ten sposób sprawdzenie zgodności teorii ekonomicznej z danymi empirycznymi; Del Negro i Schorfheide (2004). Metodologia pozwalająca na połączenie wnioskowania na podstawie estymowanych modeli równowagi ogólnej z modelami wektorowej autoregresji została zaproponowana w pracy Del Negro i Schorfheide (2004) i następnie rozwinięta przez Del Negro, Schorfheide, Smets i Wouters (2007). Określa ona klasę modeli hybrydowych, znanych w literaturze pod pojęciem DSGE-VAR (ang. Dynamic Stochastic General Equilibrium Vector AutoRegression), które powstały w wyniku poszukiwania metod uwzględniania w modelach wektorowej autoregresji informacji wstępnych, mających za zadanie ich powiązanie z teorią ekonomii i poprawienie ich własności. Pierwotnie prace te koncentrowały się na zastosowaniu modeli strukturalnych, podbudowanych teorią ekonomii, do konstrukcji rozkładów *a priori* dla wektorowej autoregresji; Ingram i Whiteman (1994), bądź do porównań własności statystycznych makroekonomicznych szeregów czasowych; DeJong, Ingram i Whiteman (1996). Modele teoretyczne dostarczały porównywalnego rozkładu *a priori*, ocenianego w kategoriach zdolności prognostycznej uzyskanej postaci hybrydowej, jak metodologia, w której zmienne wektorowej autoregresji są traktowane *a priori* jako grupa niezależnych procesów błędzenia losowego, zaproponowana w pracy Doan, Litterman i Sims (1984) oraz Litterman (1986). Pierwszy model hybrydowy, estymowany metodą największej wiarygodności, powstał po zdefiniowa-

niu procesu autoregresyjnego dla wektora zakłóceń losowych w równaniu obserwacji reprezentacji modelu równowagi ogólnej w przestrzeni stanów i został zaproponowany w pracy Ireland (2004). Dalszy rozwój metodologii polegał na konstrukcji rozkładów prawdopodobieństwa, które w sposób formalny łączyły wnioskowanie na podstawie wektorowej autoregresji z modelami posiadającymi uzasadnienie w teorii ekonomii. Techniki te pozwoliły na opracowanie metod formalnego wnioskowania o parametrach modelu równowagi ogólnej na podstawie wektorowej autoregresji w modelach hybrydowych; Del Negro i Schorfheide (2004) oraz Del Negro, Schorfheide, Smets i Wouters (2007) i dyskusję ich własności; Christiano (2007). Z obecnie opracowanych zastosowań modeli hybrydowych można wymienić prace m.in. Lee, Matheson i Smith (2007), Liu i Gupta (2008), Watanabe (2007), Chow i McNelis (2010), Adolfson, Laseén, Lindé i Villani (2008), Kolasa, Rubaszek i Skrzypczyński (2012) oraz Brzoza-Brzezina i Kolasa (2012).

Łączne wnioskowanie na podstawie obydwu podejść jest możliwe poprzez budowę modelu hybrydowego, czyli hybrydowego modelu wektorowej autoregresji. Składa się on z pomocniczego modelu wektorowej autoregresji, służącego aproksymacji rozwiązania zlinearyzowanego modelu równowagi ogólnej i konstrukcji rozkładu *a priori*, oraz zasadniczego modelu wektorowej autoregresji, szacowanego na danych rzeczywistych. Model hybrydowy można interpretować jako identyfikowalny model wektorowej autoregresji (ang. identified VAR), nie zaś jako formę zredukowaną modelu strukturalnego, An i Schorfheide (2007b). Waga λ modelu równowagi ogólnej w modelu hybrydowym może zostać ustalona arbitralnie, bądź na podstawie formalnego kryterium, opartego na brzegowej gęstości obserwacji. Model hybrydowy dostarcza narzędzia służącego odpowiedzi na pytanie, w jakim stopniu dane empiryczne potwierdzają hipotezy wnoszone przez model równowagi ogólnej, a w jakim są te hipotezy lepiej potwierdzane przez model wektorowej autoregresji bez ograniczeń. Stosowanie modelu strukturalnego jako punktu odniesienia dla procesów wektorowej autoregresji zakłada, że teoria ekonomiczna, ujęta poprzez stylizowane zależności zdefiniowane w modelowej gospodarce, nadaje się do jej uwzględnienia w modelu połączonym. Model hybrydowy można postrzegać jako sposób na poprawienie własności wektorowej autoregresji, poprzez uwzględnienie informacji wstępnej, wynikającej z teorii ekonomii, bądź też jako technikę umożliwiającą złagodzenie restrykcji obecnych w modelu równowagi ogólnej i ocenę poprawności jego specyfikacji.

Budowa modelu hybrydowego jest procesem hierarchicznym, zaczynającym się od specyfikacji rozkładu *a priori* dla wektora parametrów modelu równowagi ogólnej, warunkowo względem którego definiuje się rozkład *a priori* dla współczynników wektorowej autoregresji. Umożliwia to, po uwzględnieniu funkcji wiarygodności, wnioskowanie *a posteriori* zarówno o parametrach modelu strukturalnego jak i współczynnikach wektorowej autoregresji. Rozkład *a priori* jest konstruowany w oparciu o próbkę danych symulacyjnych z modelu struktural-

nego, które następnie służą estymacji modelu pomocniczego pozwalającego na przekazanie informacji wstępnej do modelu hybrydowego; podejście takie stosowali m.in. Sims i Zha (1998). Ma ono również swoje uzasadnienie w pionierskich pracach z zakresu łączenia w modelu statystycznym wiedzy spoza próby i informacji niesionej przez obserwacje oraz metodach ich estymacji; Theil i Goldberger (1961). Koncepcja modeli pomocniczych jest związana również z bayesowskimi metodami wnioskowania nie wprost (ang. indirect inference); Gallant i McCulloch (2009). Możliwe jest również rozpatrywanie modelu hybrydowego w kontekście badań poświęconych wykorzystywaniu wektorowej autoregresji jako punktu odniesienia do empirycznych porównań z modelami wywodzącymi się z teorii ekonomii.

Wnioskowanie w modelu hybrydowym o współczynnikach i macierzy kowariancji wektorowej autoregresji: i u , parametrach θ modelu równowagi ogólnej i parametrze wagowym λ jest możliwe po zdefiniowaniu modelu połączonego, który jest określony przez wektorową autoregresję aproksymującą rozwiązanie zlinearyzowanej postaci modelu strukturalnego oraz wektorową autoregresję bez restrykcji dla danych obserwowalnych. Łączny rozkład *a priori* dla Φ , u , θ i λ jest budowany w sposób hierarchiczny:

$$p(\Phi, \Sigma_u, \theta, \lambda) = p(\Phi, \Sigma_u | \theta, \lambda) p(\theta) p(\lambda),$$

gdzie $p(\Phi, \Sigma_u | \theta, \lambda)$ to rozkład *a priori* współczynników i macierzy kowariancji wektorowej autoregresji bez restrykcji, warunkowy względem θ , $p(\theta)$ jest brzegowym rozkładem *a priori* dla parametrów modelu równowagi ogólnej, zaś $p(\lambda)$ jest rozkładem *a priori* dla parametru wagowego. Statystyczny model bayesowski jest wtedy określony przez:

$$p(Y, \Phi, \Sigma_u, \theta, \lambda) = p(Y | \Phi, \Sigma_u) p(\Phi, \Sigma_u | \theta, \lambda) p(\theta) p(\lambda),$$

z którego uzyskujemy łączny rozkład *a posteriori*:

$$p(\Phi, \Sigma_u, \theta, \lambda | Y) = \frac{p(Y | \Phi, \Sigma_u) p(\Phi, \Sigma_u | \theta, \lambda) p(\theta) p(\lambda)}{p(Y)},$$

gdzie $p(Y)$ jest brzegową gęstością obserwacji. Łączny rozkład *a posteriori* można poddać dekompozycji:

$$p(\Phi, \Sigma_u, \theta, \lambda | Y) = p(\Phi, \Sigma_u | Y, \theta, \lambda) p(\theta, \lambda | Y),$$

gdzie warunkowy rozkład *a posteriori* parametrów autoregresji $p(\Phi, \Sigma_u | Y, \theta, \lambda)$ wyraża się standardową gęstością prawdopodobieństwa, natomiast brzegowy

rozkład parametrów modelu strukturalnego i parametru wagowego $p(\theta, \lambda|Y)$, jest przybliżany numerycznie, z zastosowaniem algorytmu Metropolis i Hastingsa; Adjemian, DarracqPariès i Moyen (2008). Hybrydowy model wektorowej autoregresji proponuje również metodę identyfikacji zakłóceń strukturalnych na podstawie innowacji występujących w postaci zredukowanej; Del Negro i Schorfheide (2004, 2006, 2008), Del Negro, Schorfheide, Smets i Wouters (2007).

9. UWAGI KOŃCOWE

Estymowany model równowagi ogólnej jest konstrukcją, która jest silnie zakorzeniona w teorii ekonomii. Otrzymane w wyniku rozwiązania mikroekonomicznych zagadnień optymalizacyjnych podmiotów równania strukturalne, mające formę nieliniowego systemu racjonalnych oczekiwań, należy sprowadzić do takiej postaci, aby ich parametry mogły zostać oszacowane na podstawie danych empirycznych, w szczególności aby można było zapisać funkcję wiarygodności. Oznacza to, że model poddaje się szeregowi przekształceń i aproksymacji, które prowadzą do jego operacjonalizacji. Główne obszary na które należy zwrócić uwagę to:

1. Układ założeń teoretycznych: postać funkcji chwilowej użyteczności i jej argumenty, struktura sektora produkcyjnego, która ma ścisły związek z mechanizmami agregującymi, w szczególności sposób indeksowania cen wpływający na postać krzywej Phillipsa.
2. Struktura procesów losowych w postaci strukturalnej, które determinują dynamikę zmiennych stanu w modelu.
3. Linearyzacja równań strukturalnych, najczęściej stosowana w praktyce w celu uproszczenia modelu. Modele w postaci nieliniowej są bardziej skomplikowane do opracowania od strony numerycznej.
4. Rozwiązanie zlinearyzowanego modelu równowagi ogólnej, powodujące nałożenie na przestrzeń parametrów skomplikowanych restrykcji, wynikających z konieczności zapewnienia jego stabilności.
5. Sposób połączenia zmiennych endogenicznych, występujących w rozwiązaniu zlinearyzowanego modelu, ze zmiennymi obserwowanymi, które należy oczyścić z trendu i sezonowości oraz sprowadzić do stacjonarności.
6. Przyjętą metodę estymacji, w szczególności czy jest to metoda z pełną informacją, jak podejście bayesowskie, czy też taka, w której równania szacuje się oddzielnie, jak np. uogólniona metoda momentów.
7. Stronę numeryczną, w której potencjalne problemy mogą wynikać z postaci funkcji wiarygodności, w konsekwencji nałożenia na przestrzeń parametrów licznych, skomplikowanych restrykcji, wynikających z konieczności zapewnienia stabilności rozwiązania modelu.

8. Funkcjonowanie algorytmu Metropolisa i Hastingsa, w szczególności dobór punktów startowych za pomocą przybliżonych metod numerycznych, monitorowanie jego zbieżności i analiza wrażliwości na zmianę wartości początkowych. Stabilność średnich ergodycznych.
9. Analizę obszarów wartości parametrów strukturalnych prowadzących do stabilności rozwiązania, wpływu w praktyce ich niewielkiej liczby na współczynniki postaci zredukowanej odpowiedzialne za charakterystyki ekonomiczne modelu.
10. W modelach hybrydowych: jakość aproksymacji zlinearyzowanego modelu równowagi ogólnej przez wektorową autoregresję, zazwyczaj niskiego rzędu. Wrażliwość ocen brzegowej gęstości obserwacji na zmianę wartości parametru wagowego.

Wymienione aspekty modelowania za pomocą estymowanych modeli równowagi ogólnej nie wyczerpują wszystkich obszarów, na które należy zwrócić szczególną uwagę w badaniach empirycznych. Mają one jedynie zasygnalizować możliwość wystąpienia problemów przy stosowaniu modeli w praktyce.

BIBLIOGRAFIA

- Adjemian A., DarracqPariès M., Moyen S. (2008), *Towards a monetary policy evaluation framework*, European Central Bank Working Paper 942.
- Adjemian S., Bastani H., Juillard M., Mihoubi F., Perendia G., Ratto M., Villemot S. (2011), *Dynare: Reference manual, version 4*, Dynare Working Papers 1.
- Adolfson M., Laseén S., Lindé J., Villani M. (2008), *Evaluating an estimated New Keynesian small open economy model*, Journal of Economic Dynamics and Control 32.
- Adolfson M., Lindé J., Villani M. (2005), *Forecasting performance of an open economy Dynamic Stochastic General Equilibrium model*, Money Macro and Finance (MMF) Research Group Conference 2005 32.
- Amisano G., Tristani O. (2007), *Euro area inflation persistence in an estimated nonlinear DSGE model*, Journal of Economic Dynamics and Control 34.
- An S., Schorfheide F. (2007a), *Bayesian analysis of DSGE models*, Econometric Review 26.
- An S., Schorfheide F. (2007b), *Bayesian analysis of DSGE models — rejoinder*, Econometric Reviews, 26.
- Arulampalam M. S., Maskell S., Gordon N., Clapp T. (2002), *A tutorial on particle filters for online non-linear/non-Gaussian Bayesian tracking*, IEEE Transactions on Signal Processing 50.
- Berliant M., Dakhliya S. (1997), *Sensitivity Analysis for Applied General Equilibrium Models in the Presence of Multiple Equilibria*, GE, Growth, Math Methods 9709003, EconWPA.
- Beyer A., Farmer R. E. A. (2004), *On the indeterminacy of New-Keynesian economics*, Computing in Economics and Finance, 152.
- Blanchard O. J., Kahn C. M. (1980), *The solution of linear difference models under linear expectations*, Econometrica, 48.
- Brzoza-Brzezina M., Kolasa M. (2012), *Bayesian evaluation of DSGE models with financial frictions*, National Bank of Poland Working Paper 109.
- Chow H. K., McNelis P. D. (2010), *Need Singapore fear floating? A DSGE-VAR approach*, Research Collection School of Economics, Paper 1250.

- Christiano L. (2007), *Comment on Marco Del Negro, Frank Schorfheide, Frank Smets, and Raf Wouters, 'On the Fit of New-Keynesian Models'*, *Journal of Business & Economic Statistics*, 25.
- Collard F., Juillard M. (2001a), *Accuracy of stochastic perturbation methods: The case of Asset Pricing Models*, *Journal of Economic Dynamics and Control* 25.
- Collard F., Juillard M. (2001b), *A higher-order Taylor expansion approach to simulation of stochastic forward-looking models with an application to a non-linear Phillips curve*, *Computational Economics* 17.
- DeJong D. N., Ingram B. F., Whiteman C. H. (1996), *A Bayesian approach to calibration*, *Journal of Business Economics and Statistics* 14.
- DeJong D. N., Ingram B. F., Whiteman C. H. (2000), *A Bayesian approach to dynamic macroeconomic*, *Journal of Econometrics* 98.
- Del Negro M., Schorfheide F. (2003), *Take your model bowling: Forecasting with the general equilibrium models*, *Economic Review — Federal Reserve Bank of Atlanta, Fourth Quarter 2003*, 88,4.
- Del Negro M., Schorfheide F. (2004), *Priors from General Equilibrium models for VARs*, *International Economic Review* 45.
- Del Negro M., Schorfheide F. (2005), *Policy predictions if the model doesn't fit*, *Journal of the European Economic Association* 3.
- Del Negro M., Schorfheide F. (2006), *How good is what you've got? DSGE-VAR as a toolkit for evaluating the DSGE models*, *Economic Review* Q2.
- Del Negro M., Schorfheide F. (2008), *Forming priors for DSGE models (and how it affects the assessment of nominal rigidities)*, *Journal of Monetary Economics* 55.
- Del Negro M., Schorfheide F. (2009), *Monetary policy analysis with potentially misspecified models*, *American Economic Review* 99.
- Del Negro M., Schorfheide F. (2012), *DSGE model-based forecasting*, *Handbook of Economic Forecasting* 2.
- Del Negro M., Schorfheide F., Smets F., Wouters R. (2007), *On the fit of New-Keynesian models*, *Journal of Business & Economic Statistics*, 25.
- Doan T., Litterman R., Sims C. (1984), *Forecasting and conditional projections using realistic prior distributions*, *Econometric Reviews* 3.
- Durbin J., Koopman S. J. (2001), *Time series analysis by state space methods*, Oxford University Press, Oxford.
- Edge R. M., Kiley M. T., Laforte J. P. (2009), *A comparison of forecast performance between Federal Reserve staff forecasts, simple reduced-form models, and a DSGE Model*, *Finance and Economics Discussion Series*, Federal Reserve Board, Washington, D.C., 2009-10.
- Fair R. C., Taylor J. B. (1983), *Solution and maximum likelihood estimation of dynamic nonlinear rational expectation models*, *Econometrica* 51.
- Fernández-Villaverde J. (2010), *The Econometrics of DSGE Models*, *SERIEs Journal of the Spanish Economic Association* 1.
- Fernández-Villaverde J., Rubio-Ramírez J. F. (2003), *Estimating nonlinear dynamic equilibrium economies: A likelihood approach*, *Computing in Economics and Finance* 91.
- Fernández-Villaverde J., Rubio-Ramírez J. F. (2004), *Comparing dynamic equilibrium models to data: A Bayesian approach*, *Journal of Econometrics* 123.
- Fernández-Villaverde J., Rubio-Ramírez J. F. (2005), *Estimating dynamic equilibrium economies: Linear versus nonlinear likelihood*, *Journal of Applied Econometrics* 20.
- Fernández-Villaverde J., Rubio-Ramírez J. F. (2007), *Estimating macroeconomic models: A likelihood approach*, *Review of Economic Studies* 74.
- Fernández-Villaverde J., Rubio-Ramírez J. F., Santos M. (2006), *Convergence properties of the likelihood of computed dynamic models*, *Econometrica* 74.
- Galí J., Gertler M., López-Salido J. D. (2005), *Robustness of the estimates of the hybrid new Keynesian Phillips curve*, *Journal of Monetary Economics* 52.

- Gallant R. A., McCulloch R. E. (2009), *On the determination of general scientific models with application to asset pricing*, Journal of the American Statistical Association, 94.
- Geweke J., Whiteman C. (2006), *Bayesian forecasting*, w: The Handbook of Economic Forecasting, (red.: G. Elliott, C.W.J. Granger i A. Timmerman), Amsterdam: North-Holland.
- Grabek G., Kłos B., Utzig-Lenarczyk G. (2007), *SOE-PL — model DSGE małej otwartej gospodarki estymowany na danych polskich*, Materiały i Studia NBP 217.
- Hamilton J. D. (1994), *Time series analysis*, Princeton University Press, Princeton.
- Herbst E., Schorfheide F. (2011), *Evaluating DSGE Model Forecasts of Comovements*, Federal Reserve Bank of Philadelphia Working Paper 11-5.
- Ingram B. F., Whiteman C. H. (1994), *Supplanting Minnesota prior. Forecasting macroeconomic time series using real business cycle model priors*, Journal of Monetary Economics, 34.
- Ireland P. N. (2004), *A method for taking models to the data*, Journal of Economics Dynamic & Control, 28.
- Jacobson T., Karlsson S. (2004), *Finding good predictors for inflation: A Bayesian model averaging approach*, Journal of Forecasting 23.
- Jeffreys H. (1961), *Theory of probability*, Oxford University Press, London.
- Jaillard M. (2002), *Perturbation method at order k: A recursive algorithm*, Computing in Economics and Finance 257.
- Kass R. E., Raftery A. E. (1995), *Bayes factors*, Journal of the American Statistical Association 90.
- Kolasa M., Rubaszek M., Skrzypczyński P. (2012), *Putting the New Keynesian DSGE model to the real-time forecasting test*, Journal of Money, Credit and Banking, (w druku).
- Lee K., Matheson T., Smith C. (2007), *Open economy DSGE-VAR forecasting and policy analysis: Head to head with the RBNZ published forecasts*, Reserved Bank of New Zealand Discussion Paper Series, DP2007/01.
- Lindé J. (2005), *Estimating New-Keynesian Phillips curves: A full information Maximum Likelihood approach*, Journal of Monetary Economics 52.
- Litterman R. (1986), *Forecasting with Bayesian vector autoregression: five years of experience*, Journal of Business & Economic Statistics, 4.
- Liu G., Gupta R. (2008), *Forecasting the South African Economy: A DSGE-VAR Approach*, Working Paper 2008-32, Tilburg University, Center for Economin Research.
- Lubik T., Schorfheide F. (2004), *Testing for indeterminacy: An application to US monetary policy*, American Economic Review 94.
- Lubik T., Schorfheide F. (2006), *A Bayesian look at New Open Economy Macroeconomics*, NBER Macroeconomic Annual 20.
- Milani F., Poirier D. J. (2007), *Econometric issues in DSGE models*, Econometric Reviews, 26.
- O'Hagan A. (1994), *Bayesian inference*, Edward Arnold, London.
- Osiewalski J. (1991), *Bayesowska estymacja i predykcja dla jednorównaniowych modeli ekonometrycznych*, Akademia Ekonomiczna w Krakowie (Monografie, nr 1000), Kraków.
- Osiewalski J. (2001), *Ekonometria bayesowska w zastosowaniach*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Krakowie, Kraków.
- Otrok C. (2001), *On measuring the welfare cost of business cycles*, Journal of Monetary Economics 47.
- Poirier D. J. (1995), *Intermediate Statistics and Econometrics: A Comparative Approach*, MIT Press.
- Rabanal P., Rubio-Ramírez J. F. (2005a), *Comparing New Keynesian models in the Euro Area: A Bayesian approach*, Journal of Monetary Economics 52.
- Rabanal P., Rubio-Ramírez J. F. (2005b), *Comparing New Keynesian models of the Business cycle: A Bayesian approach*, Journal of Monetary Economics, 52.
- Ratto M. (2008), *Analysing DSGE models with global sensitivity analysis*, Computational Economics, 31.
- Ratto M., Røger W., in't Veld J., Girardi R. (2005), *An estimated New-Keynesian dynamic stochastic general equilibrium model of the Euro area*, European Economy — Economic Paper 220.

- Rubaszek M., Skrzypczyński P. (2008), *On the forecasting performance of a small-scale DSGE model*, International Journal of Forecasting 24.
- Ruge-Murcia F. J. (2007), *Methods to estimate dynamic stochastic general equilibrium models*, Journal of Economic Dynamics and Control 31.
- Saltelli A. (2002), *Sensitivity analysis for importance assessment*, Risk Analysis, 22.
- Saltelli A., Ratto M., Andres T., Campolongo F., Cariboni J., Gatelli D., Saisana M., Tarantola S. (2008), *Global sensitivity analysis, The Primer*, Wiley.
- Saltelli A., Tarantola S., Campolongo F., Ratto M. (2004), *Sensitivity Analysis in Practice: A Guide to Assessing Scientific Models*, Wiley.
- Sargent T. J. (1989), *Two models of measurements and the investment accelerator*, Journal of Political Economy 97.
- Schorfheide F. (2000), *Loss function based evaluation of DSGE models*, Journal of Applied Econometrics 15.
- Schorfheide F. (2011), *Estimation and evaluation of DSGE Models: Progress and challenges*, Federal Reserve Bank of Philadelphia Working Paper 11-7.
- Schorfheide F., Sill K., Krysko M. (2010), *DSGE model-based forecasting of non-modelled variables*, International Journal of Forecasting 26.
- Sims C. A., Zha T. (1998), *Bayesian methods for dynamic multivariate models*, International Economic Review 39.
- Singleton K. J. (1988), *Econometric issues in the analysis of equilibrium business cycle models*, Journal of Monetary Economics, 21.
- Smets F., Wouters R. (2003), *An estimated Dynamic Stochastic General Equilibrium model of the Euro Area*, Journal of the European Economic Association 1.
- Smets F., Wouters R. (2004), *Forecasting with a Bayesian DSGE model an application to the Euro Area*, Journal of Common Market Studies 42.
- Theil H., Goldberger A. S. (1961), *On pure and mixed estimation in economics*, International Economic Review 2.
- Villemot S. (2011), *Solving rational expectations models at first order: what Dynare does*, Dynare Working Papers 2.
- Watanabe T. (2007), *The application of DSGE-VAR model to macroeconomic data in Japan*, ESRI Discussion Paper Series 225-E.
- Wróbel-Rotter R. (2007a), *Dynamic Stochastic General Equilibrium Models: Structure and Estimation, Modelling Economies in Transition 2006*, (red.: Welfe W, Wdowiński P), Łódź.
- Wróbel-Rotter R. (2007b), *Dynamiczne Stochastyczne Modele Równowagi Ogólnej: zarys metodologii badań empirycznych*, Folia Oeconomica Cracoviensia tom 48.
- Wróbel-Rotter R. (2007c), *Dynamiczny Stochastyczny Model Równowagi Ogólnej: przykład dla gospodarki polskiej*, Przegląd Statystyczny nr 3, tom 54.
- Wróbel-Rotter R. (2008), *Bayesian estimation of a Dynamic General Equilibrium model*, w: Metody Ilościowe w Naukach Ekonomicznych, Ósme Warsztaty Doktorskie z zakresu Ekonometrii i Statystyki, red. A. Welfe, Szkoła Główna Handlowa w Warszawie.
- Wróbel-Rotter R. (2011a), *Empiryczne modele równowagi ogólnej: gospodarstwa domowe i producent finalny*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, seria Ekonomia, nr 869.
- Wróbel-Rotter R. (2011b), *Obszary stabilności rozwiązywania empirycznych modeli równowagi ogólnej: zastosowanie metod analizy wrażliwości*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, seria Metody analizy danych, nr 873.
- Wróbel-Rotter R. (2011c), *Sektor producentów pośrednich w empirycznym modelu równowagi ogólnej*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, seria Ekonomia, nr 872.
- Wróbel-Rotter R. (2012a), *Analiza stopnia zgodności z danymi empirycznymi estymowanego modelu równowagi ogólnej* rękopis — złożone do druku w ZNUEK, seria Ekonomia.

- Wróbel-Rotter R. (2012b), *Empiryczne modele równowagi ogólnej: zagadnienia numeryczne estymacji bayesowskiej*, ZN UEK Metody analizy danych, 878.
- Wróbel-Rotter R. (2012c), *Empiryczne modele równowagi ogólnej: zastosowanie metody dekompozycji funkcji do oceny zależności między postacią strukturalną i zredukowaną*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, seria Metody Analizy Danych (złożone do druku).
- Wróbel-Rotter R. (2012d), *Estymowane modele równowagi ogólnej i wektorowa autoregresja: model hybrydowy*, rękopis — złożone do druku w Bank i Kredyt.
- Wróbel-Rotter R. (2012e), *Struktura empirycznego modelu równowagi ogólnej dla niejednorodnych gospodarstw domowych*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, seria Ekonomia, 879.
- Wróbel-Rotter R. (2012f), *Wybrane zagadnienia współczesnego modelowania strukturalnego, część I: estymowane modele równowagi ogólnej w zarysie*, Folia Oeconomica Cracoviensia, tom 53.
- Zellner A. (1971), *An introduction to Bayesian inference in econometrics*, Wiley, New York.